NEM PARTICIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRA ÉS KÖZTUDOTT TUDÁS[1]

BADICS JUDIT – GÖMÖRI ANDRÁS
Veszprémi Egyetem Közgazdaságtan Tanszék – BKÁE Mikroökonómia Tanszék

Cikkünkben a (dinamikus) nem teljes információs játékok elméletében, a játékosok tudásának leírására használt információs struktúra és —az ugyancsak ebben az elméletben használt— köztudott tudás fogalom kapcsolatát vizsgáljuk. Bevezetünk egy a szokásosnál általánosabb köztudott tudás fogalmat, amely az ugyancsak a szokásosnál általánosabb információs struktúrák esetén is érvényes. Végül rámutatunk a hagyományos és az általunk tárgyalt információs struktúrák kapcsolatára, elsősorban a köztudott tudás fogalmának fényében.

1 Bevezetés

A dinamikus (szekvenciális), nem teljes információs játékok megoldása a tökéletes Bayes-i egyensúly fogalmára épül (Fudenberg-Tirole [1991] 325-326. o.). Tekintsük az ilyen játék legegyszerűbb, kétszereplős változatát, amelyben az egyik fél informáltsága teljes és ő lép először, majd a rosszul informált fél ezt a lépést megfigyelve hozza meg döntését és ezzel a játéknak vége. Ekkor a rosszul informált fél stratégiáját korrigált vélekedésére (posterior belief) alapozza, amelyet viszont kezdeti vélekedésére (prior belief) és a másik fél lépésére vonatkozó megfigyelésére építve, a Bayes-szabály alapján alakít ki. A Bayes-szabály azonban particionális információs struktúrát feltételez. Ugyanakkor a tökéletes Bayes-i egyensúly feltételezi, hogy a rosszul informált fél korrigált vélekedése —a játék struktúráját leíró más információkhoz hasonlóan— a szereplők között köztudott tudás (common knowledge). Az itt használt köztudott tudás fogalom tehát particionális információs struktúrára épül.

A particionális információs struktúra azonban —miközben azt írja le, hogy a döntéshozó nem tud mindent— igen szigorú feltevéseket jelent a döntéshozó tudására nézve. Feltételezi, ugyanis, hogy egy általa nem ismert állapotban, valamely információ megszerzése nyomán el tudja különíteni az állapotok olyan részhalmazát, amelynek a fennálló állapot biztosan eleme. Az ennél általánosabb, nem particionális információs struktúra esetén azonban ez nem feltétlenül van így. A döntéshozó tudására vonatkozó feltevések enyhítése azzal kecsegtet, hogy a nem teljes információs stratégiai döntési helyzetek szélesebb köre válik a játékelmélet eszközeivel kezelhetővé.

[1] Köszönetet mondunk Dancs Istvánnak és Dombi Péternek értékes megjegyzéseikért.

A nem particionális információs struktúra használata nem ismeretlen az irodalomban. Az általunk ismert cikkek (Geanakoplos [1992] 78–81. o., Rubinstein – Wolinsky [1990] 192–193. o., Neeman [1996] 78–79. o.) szerzői a nem particionális információs struktúrát egyfajta döntéshozói irracionalitás leírásának eszközeként használják, azt állítva, hogy a döntéshozó információs struktúrája akkor nem particionális, ha nem használja fel információit maradéktalanul. Ezzel szemben mi olyan döntéshozót tételezünk fel, aki maradéktalanul kihasználja a rendelkezésére álló információkat, információs struktúrájának nem-particionalitása, helyzetét —információs szempontból— leíró adottság. Az említett gondolatmenetek tárgya tehát nem azonos az általunk vizsgált kérdéssel.

Cikkünkben e problémakör egyetlen vonatkozását, a nem particionális információs struktúra és a rá épülő köztudott tudás fogalmának viszonyát vizsgáljuk. Először megadjuk a particionális információs struktúra formális leírását, majd a köztudott tudás fogalmának ismert definícióját. Ezután a köztudott tudás fogalmának olyan általánosítását adjuk, amely egyaránt érvényes particionális és nem particionális információs struktúra esetén. Ez az általánosítás egyetlen állításon alapul: halmazrendszerek legfinomabb közös particionális durvítása partíciók esetén megegyezik azok legfinomabb közös durvításával. Cikkünkben ezt az állítást bizonyítjuk. Végül kimondunk egy állítást az általunk vizsgált és a hagyományos információs struktúra viszonyára vonatkozóan.

2 Particionális információs struktúra és köztudott tudás

Minthogy a stratégiai interakció kérdéseivel itt nem foglalkozunk, a szereplőket döntéshozóknak fogjuk nevezni.

Definíció. Legyen Ω a döntéshozó számára releváns, lehetséges állapotok véges halmaza. Ekkor a

$$\phi : \Omega \to Y$$

függvény a döntéshozó *jelzőfüggvénye*, Y elemeit pedig *jelzésnek* (jelnek, szignálnak) nevezzük.

A jelzőfüggvény fontos tulajdonsága, hogy a ϕ^{-1} leképezés partíciót hoz létre az Ω állapothalmazon. Ekkor a döntéshozó információs struktúrája particionális. A $\mathcal{P}$ partíció a döntéshozó információs partíciója. Az információs struktúra megadható az információs partíció segítségével is.

A köztudott tudás hagyományos fogalmának bemutatásához szükségünk lesz néhány fogalomra.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset P(\Omega)$ partíció. $\mathcal{P}'$ durvább, mint $\mathcal{P}$, ha

$$\forall I' \in \mathcal{P}' \quad \exists I_1, I_2, \ldots I_n \in \mathcal{P} \quad : \quad I' = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \, .$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}'$ (gyenge) durvítása $\mathcal{P}$-nek. Jelölése: $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ az Ω két partíciója. $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ legfinomabb közös durvítása $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$, ha teljesíti a következő feltételeket:

$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ az Ω partíciója,
$\mathcal{P}_1 \geq \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ és $\mathcal{P}_2 \geq \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$,
ha $\mathcal{P}_3$ partíció, $\mathcal{P}_1 \geq \mathcal{P}_3$ és $\mathcal{P}_2 \geq \mathcal{P}_3$, akkor $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \geq \mathcal{P}_3$.

A továbbiakban feltesszük, hogy a szituációban n döntéshozó szerepel, az i-edik döntéshozó információs struktúrája $\mathcal{P}_i$. Jelölje

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n$$

a döntéshozók információs struktúrájának legfinomabb közös durvítását, illetve $\omega \in \Omega$ esetén $\mathcal{P}^*(\omega)$ pedig $\mathcal{P}^*$ azon elemét, amely ω-t tartalmazza.

Definíció (Aumann [1976]). Az $E \subseteq \Omega$ esemény pontosan akkor *köztudott tudás* a döntéshozók között az ω állapotban, ha

$$\mathcal{P}^*(\omega) \subseteq E\,. \tag{1}$$

3 Nem particionális információs struktúra és köztudott tudás

Most nem tesszük fel, hogy minden állapot egyértelműen meghatározza a döntéshozó által megfigyelt jelzést, hanem csak azt követeljük meg, hogy minden egyes állapothoz kijelölhető legyen az összes jelzések halmazának egy olyan részhalmaza, amelynek egyik elemét az adott állapot bekövetkezése esetén a döntéshozó megfigyeli. A megfigyelt jelzés információt hordoz a döntéshozó számára, ha feltesszük, hogy ismeri *jelzőfüggvényét.*

Definíció. Az i-edik döntéshozó *jelzőfüggvénye* a

$$\phi_i : \Omega \to P(Y_i)$$

függvény. A $\phi_i(\omega)$ halmaz elemeit az i-edik döntéshozó számára az ω állapotban *megfigyelhető jelzéseknek* nevezzük.

A döntéshozó tehát megfigyeli jelzését, majd jelzőfüggvényének ismeretében meghatározza, hogy melyek azok az állapotok, amelyekben az aktuálisan megfigyelt jelzés számára megfigyelhető. Ezt írja le a következő függvény:

$$\phi_i^- : Y_i \to P(\Omega) \qquad y_i \mapsto \{\, \omega \in \Omega \mid y_i \in \phi_i(\omega) \,\}\,.$$

Definíció. Tetszőleges $y_i \in Y_i$ esetén $\phi_i^-(y_i)$ az y_i jelzéshez tartozó *információs halmaz*, az információs halmazokból álló halmazrendszer pedig a döntéshozó *információs struktúrája:*

$$\mathcal{P} = \{\, \phi_i^-(y_i) \mid y_i \in Y_i \,\}\,.$$

Látható, hogy $\mathcal{P}$ nem feltétlenül partíció, és lefedi Ω-t.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{P}'$ durvább, mint $\mathcal{P}$, ha

$\forall I' \in \mathcal{P}' \quad \exists I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathcal{P} \ : \quad I' = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, és
$\forall I \in \mathcal{P} \quad \exists I' \in \mathcal{P}' \ : \quad I \subseteq I'$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}'$ (gyenge) durvítása $\mathcal{P}$-nek. Jelölése: $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{P}'$ particionális durvítása $\mathcal{P}$-nek, ha $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ és $\mathcal{P}'$ partíció.

A következőkben megmutatjuk, hogy tetszőleges halmazrendszerhez egyértelműen létezik annak legfinomabb particionális durvítása. Ehhez szükségünk lesz a következő fogalomra:

Definíció. Legyen $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ az Ω két partíciója. $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ *legdurvább közös finomítása* $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$, ha teljesíti a következő feltételeket:

$\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ az Ω partíciója,
$\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ és $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$,
ha $\mathcal{P}_3 \subseteq P(\Omega)$, $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_3$ és $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_3$, akkor $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_3$.

Állítás. Legyen $\mathcal{P} \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor egyértelműen létezik $\mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$, melyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$
(2) $\mathcal{P}'$ partíció
(3) $\forall \mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega)$ partíció esetén $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$.

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelölést:

$$\Pi = \{\, \mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega) \mid \mathcal{P}'' \text{ particionális durvítása } \mathcal{P}\text{-nek } \}\,.$$

$\Pi \neq \emptyset$, mert $\{\Omega\} \in \Pi$. Először megmutatjuk, hogy Π zárt a legdurvább közös finomítás képzésére. Legyen $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2 \in \Pi$ tetszőleges. Ekkor $\mathcal{P}_1$ partíció, $\mathcal{P}_2$ partíció és $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}$. Ebből a $\vee$ művelet definíciója szerint következik, hogy $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}$ és $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ partíció. Ekkor pedig $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \in \Pi$, ami pontosan azt jelenti, hogy Π zárt a $\vee$ műveletre. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{P}' = \bigvee_{\mathcal{P}'' \in \Pi} \mathcal{P}''.$$

Ekkor mivel Π zárt a $\vee$ műveletre, azért $\mathcal{P}' \in \Pi$ teljesül, amiből (1) és (2) következik.

Másrészt, ha $\mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega)$ partíció és $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}$, akkor $\mathcal{P}'' \in \Pi$, amiből $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$ következik. Ez pedig (3) teljesülését biztosítja.

Az (1)-(3) feltételeket kielégítő $\mathcal{P}'$ egyértelműségének belátásához tegyük fel, hogy $\hat{\mathcal{P}}$ is teljesíti az (1)-(3) feltételeket. Ekkor egyrészt $\hat{\mathcal{P}} \leq \mathcal{P}'$, másrészt $\mathcal{P}' \leq \hat{\mathcal{P}}$ teljesül, amelyekből $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}'$ következik.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{P}'$ a legfinomabb particionális durvítása $\mathcal{P}$-nek, ha

(1) $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$
(2) $\mathcal{P}'$ partíció
(3) $\forall \mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega)$ esetén $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$.

Jelölés. $\mathcal{P}^*$ a $\mathcal{P}$ legfinomabb particionális durvítása.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{P} \subseteq P(\Omega)$ partíció, akkor $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.

Definíció. Legyen 1 és 2 két döntéshozó a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq P(\Omega)$ információs struktúrával. $\mathcal{P}^*$ a legfinomabb közös particionális durvítása $\mathcal{P}_1$-nek és $\mathcal{P}_2$-nek, ha $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1^* \wedge \mathcal{P}_2^*$.

Tehát $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ legfinomabb közös particionális durvítása, éppen a legfinomabb particionális durvításuk legfinomabb közös durvítása. Az előző megjegyzésből következik, hogy ha $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ partíciók, akkor azok legfinomabb közös particionális durvítása megegyezik legfinomabb közös durvításukkal. Tehát a legfinomabb közös particionális durvítás fogalma a legfinomabb közös durvítás fogalmának általánosítása.

Ezek után definiáljuk a köztudott tudás fogalmát tetszőleges információs struktúrák esetére.

Definíció. Legyenek $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók tetszőleges információs struktúrái. Legyen $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1^* \wedge \mathcal{P}_2^* \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n^*$ és $\omega \in \mathcal{P}^*(w) \in \mathcal{P}^*$. Az $E \subseteq \Omega$ esemény köztudott tudás a döntéshozók között, ha $\mathcal{P}^*(w) \subseteq E$.

Amennyiben $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ partíciók, a definícióban szereplő $P^*(w)$ megegyezik az (1) definícióban szereplő $\mathcal{P}^*(w)$-val.

Végül megfogalmazunk egy állítást két döntéshozó "köztudott tudás szerkezetére" vonatkozóan, amennyiben információs struktúrájuk particionális, illetve nem particionális.

Állítás. Legyenek az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, …, $\mathcal{P}_n$ egy adott helyzetben, illetve ugyanezen döntéshozók információs struktúrái $\mathcal{P}_1^*, \mathcal{P}_2^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ egy másik helyzetben. Legyen az első helyzetben

$$K_E = \{\, \omega \in \Omega \mid \text{ köztudott tudás az } \omega\text{-ban} \,\}$$

a második helyzetben

$$K_E^* = \{\, \omega \in \Omega \mid \text{ köztudott tudás az } \omega\text{-ban} \,\}$$

Ekkor

$$K_E = K_E^* .$$

Bizonyítás. Tetszőleges $E \subseteq \Omega$ eseményre $K_E = \{\, \omega \in \Omega \mid$ köztudott tudás ω-ban a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ információs struktúrák mellett $\} = \{\, \omega \in \Omega \mid \mathcal{P}^*(w) \subseteq E \,\} = \{\, \omega \in \Omega \mid$ köztudott tudás ω-ban a $\mathcal{P}_1^*, \mathcal{P}_2^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ információs struktúrák mellett $\} = K_E^*$.

Irodalom

1. Aumann, R. [1976]: Agreeing to Disagree, *Annals of Statistics*, 4 :1236–39.
2. Fudenberg, D. - J. Tirole [1991]: *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
3. Geanakoplos, J. [1992]: Common Knowledge, *Journal of Economic Perspectives*, 6: 53–82.
4. Neeman, Z. [1996]: Common Beliefs and the Existence of Speculative Trade, *Games and Economic Behavior*, 16: 77–96.
5. Rubinstein, A. - Wolinsky, A. [1990]: On the Logic of "Agreeing to Disagree" Type Results, *Journal of Economic Theory*, 51: 184–193.

NONPARTITIONAL STRUCTURE OF INFORMATION AND COMMON KNOWLEDGE

In the theory of dynamic games with incomplete information it is generally assumed that the information structures of the players are partitional. Furthermore the concept of common knowledge plays an important role in the solution of such games. The paper introduces a more general notion of common knowledge wich is appropriate for any —not only for partitional— information structure. The paper compares the conventional and this general information structure and their relation to the concept of the common knowledge.